

УДК 517.53

ПЕРИОДИЧЕСКИЙ АНАЛОГ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

© А.В. Васильев

Ключевые слова: краевая задача Римана; индекс.

Рассматривается периодический аналог классической краевой задачи Римана для верхней и нижней полуплоскости и приводятся теоремы о разрешимости в зависимости от индекса этой задачи.

1. Классическая краевая задача Римана на прямой [1, 2] заключается в нахождении пары функций $\Phi^\pm(t), t \in \mathbf{R}$, допускающих аналитическое продолжение в верхнюю (нижнюю) комплексную полуплоскость $\mathbf{C}_\pm$, соответственно, граничные значения которой на вещественной прямой удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^+(z) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Давно известны многочисленные применения этой задачи в различных физических и технических вопросах [1, 2]. Ключевую роль в решении задачи (1) играет интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{z - \tau} d\tau, \quad z \in \mathbf{C}_\pm, \quad (2)$$

с помощью которого решение задачи (1) дается в явном виде [1,2].

Существует и другая разновидность краевой задачи Римана (ее называют задачей Римана – Гильберта), где линейное соотношение типа (1) связывает граничные значения действительной и мнимой части аналитической в единичном круге функции [1, 2]. Эта задача решается с помощью другого сингулярного интеграла с ядром $\operatorname{ctg} x$, именно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} d\tau, \quad (3)$$

понимаемого в смысле главного значения. Мы покажем, что сингулярный интеграл (3) можно использовать в качестве инструмента для решения другой задачи (мы называем ее периодической задачей Римана), которая возникает при исследовании дискретных сверток на полуоси [3].

2. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ верхнюю и нижнюю полу-полосы

$$\Pi_\pm = \{z \in \mathbf{C} : z = x + iy, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \pm y > 0\}$$

и сформулируем следующую краевую задачу: найти пару функций $\Phi^\pm(z)$, аналитических в полу-полосе $\Pi_\pm$, соответственно, граничные значения которых удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad (4)$$

где $G(t), g(t)$ – заданные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, $G(-\pi) = G(\pi), g(-\pi) = g(\pi)$.

Можно определить целое число $\varkappa$, называемое индексом задачи

$$\varkappa = \int_{-\pi}^{\pi} d \arg G(t),$$

в терминах которого описывается картина разрешимости уравнения (4). В общем, она аналогична картине разрешимости классической краевой задачи Римана, и получается переходом от полу-полосы к единичному кругу. В случае $G(t) \equiv 1$ задача (4) называется задачей скачка.

Т е о р е м а 1. Если функция $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на отрезке $[-\pi, \pi]$, то единственное решение задачи скачка, исчезающее на ∞ , дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} d\tau, \quad z \in \Pi_{\pm}.$$

Т е о р е м а 2. Если $\varkappa = n$, $n \in \mathbf{N}$, то задача (4) имеет только такие решения, которые описываются формулой

$$\Phi^{+}(z) = S_n(z)e^{\Gamma^{+}(z)}, \quad \Phi^{-}(z) = e^{-izn}S_n(z)e^{\Gamma^{-}(z)},$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(e^{-int}G(t)) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t - z}{2} dt + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(e^{-int}G(t)) dt, \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k e^{-ikz},$$

$c_0, c_1, \dots, c_n$ – произвольные постоянные.

Т е о р е м а 3. Если $\varkappa = -n$, $n \in \mathbf{N}$, то для разрешимости задачи (4) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t)}{X^{+}(t)} e^{-it(k-1)} dt = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, |n|, \quad (5)$$

где $X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}$.

При выполнении условий (5) решение задачи (4) единственно.

3. Эта задача может быть с успехом использована для изучения некоторых классов многомерных дискретных уравнений. Начальные результаты в этом направлении приведены в [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. Vasilyev V.B. Discrete convolutions and difference equations // Proceedings of Dynamic Systems and Applications. 2008. V. 5. P. 474-480.
4. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. On some discrete equations in a half-space // ARGESIM Report no. S38: Preprints MATHMOD 2012, 15–17 February 2012. Vienna. Abstract Volume. Editors: Inge Troch, Felix Breitenacker. P. 384.
5. Васильев А.В., Васильев В.Б. Дискретные уравнения и периодические задачи // Труды 55-й научной конференции МФТИ. 19–25 ноября 2012. Москва – Долгопрудный – Жуковский. Управление и прикладная математика. М, 2012. Т. 1. С. 25-26.

Vasilyev A.V. PERIODIC ANALOGUE OF RIEMANN BOUNDARY PROBLEM

A periodic analogue of classical Riemann boundary problem for upper and lower half-plane and describes solvability theorems depending on the index of the problem is considered.

Key words: Riemann boundary problem; index.

УДК 517.983

ОБРАТИМОСТЬ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В МНОГОМЕРНЫХ КОНУСАХ

© В.Б. Васильев

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение; конус; обратимость; условие Дирихле.

Рассматривается модельное псевдодифференциальное уравнение в многомерном конусе и при некоторых дополнительных условиях описывается структура общего решения псевдодифференциального уравнения в пространствах Соболева–Слободецкого.

1. При изучении разрешимости псевдодифференциальных уравнений в областях с негладкой границей одним из ключевых моментов является описание условий обратимости модельного оператора в канонической негладкой области. Если граница содержит коническую точку x_0 , то речь идет об обратимости оператора

$$u(x) \mapsto \int_{C_+^a} \int_{\mathbf{R}^m} A(x_0, \xi) e^{ix\xi} \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где $A(x, \xi)$ – символ оператора A ; $C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x_1, \dots, x_m), x_m > a|x'|, a > 0, x' = (x_1, \dots, x_{m-1})\}$, другими словами, требуется обратимость оператора (1) с замороженным полюсом x , т. е. с символом $A(\cdot, \xi)$, не зависящим от x .

Мы рассматриваем псевдодифференциальное уравнение вида

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in C_+^a, \quad (2)$$

в многомерном конусе C_+^a в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(C_+^a)$, где A – псевдодифференциальный оператор с символом $\hat{A}(\xi), \xi \in \mathbf{R}^m$.

Уравнение (2) – типичное модельное уравнение при исследовании разрешимости псевдодифференциальных уравнений на многообразиях, граница которых содержит конические точки (ситуация с гладкой границей подробно описана в [1]). Для решения этой задачи автор [2] ввел понятие волновой факторизации символа эллиптического оператора относительно конуса C_+^a и в двумерном случае описал условия обратимости оператора (1) при наличии такой факторизации. Здесь рассматривается существенно многомерная ситуация ($m \geq 3$) и специальные типы граничных условий в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(C_+^a)$.

Пространство Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbf{R}^m)$ – это гильбертово пространство (обобщенных) функций с конечной нормой [1]

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbf{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi.$$